ESPAÇOS VETORIAIS INTERESSANTES

GUILHERME ZEUS DANTAS E MOURA

Definições

Definição (Espaço Vetorial)**.** Um *espaço vetorial* V sobre um corpo K é um conjunto atrelado a duas operações, adição $+\colon V \times V \to V$ e multiplicação por escalar $\cdot\colon K \times V \to V$, tal que

(1) $u + (v + w) = (u + v) + w$ para todo $u, v, w \in V$;
(2) $u + v = v + u$ para todo $u, v \in V$;
(3) existe $0 \in V$ tal que $0 + v = v$ para todo $v \in V$;
(4) para todo $v \in V$ existe $w \in V$ tal que $v + w = 0$;
(5) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ para todo $\alpha, \beta \in K$ e $v \in V$;
(6) $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$ para todo $\alpha \in K$ e $v, w \in V$;
(7) $(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$ para todo $\alpha, \beta \in K$ e $v \in V$;
(8) $1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$.

Definição (Independência Linear)**.** Dizemos que um conjunto $S \subseteq V$ é *linearmente independente* se, para todo subconjunto finito $S' \subseteq S$ e todo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{|S'|} \in K$,

$$\alpha_1 \cdot s_1 + \alpha_2 \cdot s_2 + \cdots + \alpha_{|S'|} \cdot s_{|S'|} = 0$$

implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{|S'|} = 0$. Caso contrário, dizemos que S é *linearmente dependente*.

Definição (Base)**.** Dizemos que um conjunto $B \subseteq V$ é uma *base* se

(1) B é linearmente independente e;
(2) B gera V, isto é, para todo $v \in V$ existe um subconjunto finito $B' \subseteq B$ e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{|B'|} \in K$ tal que

$$v = \alpha_1 \cdot b_1 + \alpha_2 \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{|B'|} \cdot b_{|B'|}.$$

Observe que não é necessário que uma base seja um conjunto finito, nem é garantido a existência de uma base para qualquer espaço vetorial.

Definição (Dimensão)**.** Dizemos que a *dimensão* de V é o número de elementos de uma base de V.

---

22 de Janeiro de 2024.
27ª Semana Olímpica, Bento Gonçalves, Rio Grande do Sul, Brasil.
`guilhermezeus.com`.

Espaços de Recorrências Lineares

Problema 1. Determine todas as sequências $x_0, x_1, x_2, \ldots$ de números reais que satisfazem, para todo inteiro não negativo n,

$$(*) \qquad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n.$$

Um estudante de ensino médio talvez tenha aprendido que a solução é

$$x_n = \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

onde α e β são parâmetros reais. Mas por que essa é a solução? Talvez esse estudante explicaria que essa é a solução pois $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ são as raízes do polinômio $x^2 - x - 1$, que esse estudante talvez tenha aprendido que é o polinômio característico da recorrência. Mas, de novo, o que o polinômio característico tem a ver com a solução?

Vamos tentar provar, e ainda mais, entender o que está acontecendo, usando espaços vetoriais. Nessa seção, defina V como o conjunto de todas as sequências $x_0, x_1, x_2, \ldots$ de números reais que satisfazem a recorrência $(*)$.

Exercício 2. Convença-se que V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Quais são as operações de adição e multiplicação por escalar? Por que essas operações são bem definidas?

Exercício 3. Determine a dimensão de V — quantos graus de liberdade temos para escolher uma sequência $x_0, x_1, x_2, \ldots$ que satisfaça a recorrência $(*)$? Use a definição de dimensão para provar sua resposta.

Exercício 4. Determine uma base de V, isto é, um conjunto satisfazendo qualquer uma das seguintes propriedades equivalentes: *i.* um conjunto linearmente independente que gera V; *ii.* um conjunto linearmente independente com d elementos, onde d é a dimensão de V; *iii.* um conjunto que gera V e tem d elementos, onde d é a dimensão de V.

Exercício 5. Escreva a solução geral da recorrência $(*)$ como uma combinação linear dos elementos da base que você encontrou no exercício anterior.

Problema 6. Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}$ números reais. Determine todas as sequências $x_0, x_1, x_2, \ldots$ de números reais que satisfazem, para todo inteiro não negativo n,

$$(\dagger) \qquad x_{n+d} = a_{d-1} x_{n+d-1} + a_{d-2} x_{n+d-2} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n.$$

Escreva sua resposta em função das raízes do polinômio característico $p(x) = x^d - a_{d-1} x^{d-1} - a_{d-2} x^{d-2} - \cdots - a_1 x - a_0$.

Exercício 7. Qual é o desafio em resolver esse problema mais geral? O que você precisa descobrir para superar esse desafio?

Espaços sobre Corpos Finitos

Os exemplos prototípicos de corpos finitos são os corpos da forma $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ para p primo, que podem ser interpretados como o conjunto $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ com as operações de adição e multiplicação módulo p.

Lights Out. O jogo *Lights Out* é jogado em um tabuleiro 5×5, onde cada casa possui uma lâmpada que pode estar acesa ou apagada. No início do jogo, algumas lâmpadas estão acesas e outras estão apagadas. Em cada jogada, podemos escolher uma lâmpada e inverter o estado dela e das lâmpadas adjacentes (acima, abaixo, à esquerda e à direita). O objetivo do jogo é apagar todas as lâmpadas (como bônus, no menor número de jogadas possível).

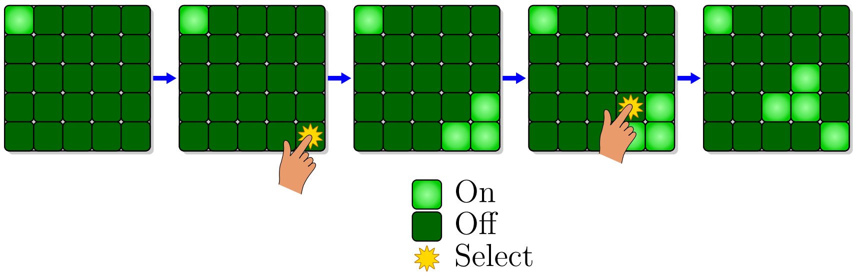

Figura 1. Tabuleiro do jogo Lights Out.

Exercício 8. Modele o jogo *Lights Out* como um espaço vetorial. Qual corpo você deve usar?

Problema 9 (Alemanha TST 2004)**.** Seja G um grafo simples finito. Existe uma lâmpada em cada vértice de G, que pode estar acesa ou apagada. Inicialmente, todas as lâmpadas estão apagadas. Em cada passo, podemos escolher um vértice e inverter o estado de sua lâmpada e das lâmpadas de todos os seus vizinhos. Prove que é possível deixar todas as lâmpadas acesas simultaneamente.

Espaço de Números Reais sobre Números Racionais

Nessa seção, vamos considerar o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais como um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$.

Exercício 10. Convença-se que V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Quais são as operações de adição e multiplicação por escalar? Por que essas operações são bem definidas?

Exercício 11. Dê exemplos de subconjuntos linearmente independentes em $\mathbb{R}$. Prove que $\mathbb{R}$ não tem base finita sobre $\mathbb{Q}$.

Para achar uma base de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$, precisamos assumir o Axioma da Escolha. Vamos usar uma versão equivalente do Axioma da Escolha, o Lema de Zorn.

Definição (Conjunto Parcialmente Ordenado)**.** Um *conjunto parcialmente ordenado* é um conjunto X atrelado a uma relação binária $\leq$ em X tal que

(1) $x \leq x$ para todo $x \in X$;
(2) se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$;
(3) se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.

Definição (Cadeia)**.** Uma *cadeia* em um conjunto parcialmente ordenado X é um subconjunto $C \subseteq X$ tal que, para todo $x, y \in C$, $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Definição (Cota Superior)**.** Uma *cota superior* de um subconjunto $S \subseteq X$ de um conjunto parcialmente ordenado X é um elemento $x \in X$ tal que, para todo $y \in S$, $y \leq x$.

Axioma (Lema de Zorn)**.** Seja X um conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadeia em X tem uma cota superior em X. Então X tem um elemento maximal.

Exercício 12. Aplique o Lema de Zorn para mostrar que $\mathbb{R}$ tem uma base como espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ — ou, de modo mais geral, prove que todo espaço vetorial tem uma base.

E daí?

Problema 13. São dados 13 números reais com a seguinte propriedade. Ao excluir qualquer um deles, os restantes podem ser divididos em dois grupos de seis números com somas iguais. É necessário que todos os 13 números sejam iguais?

Exercício 14. Resolva o problema acima para a restrição de que os números sejam inteiros. Expanda para a restrição de que os números sejam racionais.

Exercício 15. Expanda para a restrição de que os números sejam reais. Use a noção de que $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$, com base B, para provar que todos os números são iguais.